

## 受験生の皆さんに伝えたいこと

医学部受験生を教えて20数年が経ちました。その間、本当によい生徒たち、先生たちに出会い私自身も成長することができました。今回、好運にも執筆の機会を得ましたが、私はこの参考書にその20数年間の蓄積を集大成させました。

さて、医学部に合格することは確かに非常に難しいです。しかし、医学部に合格するために特別な才能が必要なわけではありません。実際、今医学部に通っている学生たちも、現在医師に従事している人たちも努力によってそれを勝ち得たのです。そして、それは皆さんにとっても努力によって必ず届く範囲です。

本書は医学部に出題率が高く典型的で質の高い問題を厳選しました。解答はなるべくわかり易く書いたつもりです。【解答】のあとの(解説)、(参考)は解答に対する補足、ポイントの整理、問題の意味を解説しました。(発展)では問題の背景やその問題と大学以降の数学とのつながりを述べたものです。こういうものを通して「数学って面白いんだ」と思ってもらえたら幸いです。

次に本書の活用法について述べます。

- 1 まず、ノートとエンピツを用意し、解けなくてもすぐにはあきらめずに【考え方】などを参照して「少なくとも25分」くらいは考えて下さい。
- 2 自力で解けなかったら【解答】、(解説)をじっくり読んで理解したら、ノートに自分なりの解答を書いて下さい。
- 3 そして類題をやります。

このようにして一通りやって下さい。これが一回目の勉強です。

さてこれからが大切です！物事は一回だけで修得できるというものはほとんどありません。卑近な例ですが、自転車に乗るのだって、逆上がりだって何度も何度も練習してできるようになります。

医学部の入試は平均するとだいたい100分で4題くらいです。したがって入試においては初見の問題を1題平均25分くらいで解くことになります。そのためには、すでに学習した問題が25分くらいで解答を見ないで解けるようになることが必要です。そこで、

- 4 本書にある問題、類題をすべて解答を見ないで25分くらいで解けるまで繰り返して下さい。その際、すべての計算を実行しきちんと解答をノートに書いて下さい。

知ることと繰り返すことは違います！医学部に合格した人たちに聞くと7回は繰り返したということをよく耳にします。このように繰り返し繰り返しやることで計算力がつき、数学特有の発想法や思考回路が脳の中にできあがっていくのでしょうか。数学が不得意な人は、数学こそは繰り返すことが必要だと肝に銘じて下さい。受験勉強というのは、ある意味では学んだ問題をすべて解けるようにしていく、しか方法はないのです。上の4で述べたことをやるかどうかは医学部への合否の別れ道です。

人間は計り知れない潜在能力を秘めています。成功を信じて頑張ってください。

なお初校の段階で中村拓人先生にみてもらいました。ここに感謝の意を表します。

2015年9月 西山清二

## 目 次

はじめに

受験生の皆さんに伝えたいこと

### 第1章 極 限

問題1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ の証明	8	類題1	9
問題2 漸化式で定まる数列の極限 $ x_{n+1} - \alpha  \leq K x_n - \alpha $	10	類題2	13
問題3 ニュートン法	14	類題3	17
問題4 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の応用	18	類題4	19
問題5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	20	類題5	21
問題6 無限級数の和	22	類題6	23

### 第2章 微分法の応用

問題7 グラフの概形	24	類題7	25
問題8 パラメータ表示された曲線の 概形—リサージュ曲線	26	類題8 [リサージュ曲線]	29
問題9 最大・最小(1)	30	類題9	31
問題10 最大・最小(2) 独立2変数	32	類題10	33
問題11 最大・最小(3) 陰関数	34	類題11 [スネルの法則(屈折の法則)]	35
問題12 方程式への応用(接線の本数)	36	類題12	37
問題13 通過範囲	38	類題13	41
問題14 不等式への応用	42	類題14	43
問題15 凸不等式	44	類題15	47
問題16 エントロピー	48	類題16	51
問題17 $e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$	52	類題17	53

### 第3章 積分法の応用

問題18 定積分の計算(対称性の利用)	54	類題18	55
問題19 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (ウォリスの 公式)	56	類題19 [ウォリスの公式]	57
問題20 ベータ関数	58	類題20	59
問題21 直交関数	60	類題21	61
問題22 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ . $e$ の無理数性	62	類題22 [ライプニッツ級数・ メルカトル級数]	63
問題23 双曲線関数	64	類題23 [双曲線関数]	67
問題24 極座標と面積(レムニスケート)	68	類題24 [デカルトの正業曲線]	71
問題25 パラメータ表示された曲線の 囲む面積(カージオイド)	72	類題25 [リマソン]	73
問題26 サイクロイドとその平行曲線 の囲む面積	74	類題26 [円の仲間線]	77

問題27	図形の回転体の体積……………78	類題27	……………79
問題28	不等式で表された立体の体積 80	類題28	[球と円柱の共通部分の体積] ……83
問題29	y軸回転体の体積……………84	類題29	……………85
問題30	斜軸回転体の体積……………86	類題30	……………89
問題31	非回転体の体積……………90	類題31	……………91
問題32	回転一葉双曲面……………92	類題32	……………93
問題33	回転放物面……………94	類題33	……………95
問題34	展開可能な曲面の面積 <sup>◆</sup> ……………96	類題34	……………97
問題35	曲線の長さ、対数螺線……………98	類題35	[円の垂足曲線] ……99

#### 第4章 微分・積分総合

問題36	絶対値記号を含む定積分……………100	類題36	……………101
問題37	積分方程式……………102	類題37	……………105
問題38	チェビシェフの多項式……………106	類題38	……………109
問題39	体積の評価と極限……………110	類題39	[面積の評価と極限] ……113
問題40	$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x)  \sin nx  dx$ ……114	類題40	……………117
問題41	格子点の個数の評価……………118	類題41	……………119
問題42	面積(長方形)比較による 不等式とその応用……………120	類題42	……………121
問題43	面積(台形)比較による 不等式とその応用……………122	類題43	……………124
問題44	変位・速度・加速度……………126	類題44	……………129
問題45	水の問題……………130	類題45	……………131
問題46	確率と区分求積法……………132	類題46	……………133

#### 第5章 2次曲線と極座標

問題47	楕円の準円……………134	類題47	[楕円に外接する長方形] ……135
問題48	楕円の極方程式……………136	類題48	……………139
問題49	双曲線の性質……………140	類題49	[双曲線の性質] ……141

#### 第6章 複素数平面

問題50	代数方程式の共役解と複素数 平面上での解の配置……………142	類題50	[複素数平面上での解の配置 (ファン・アーン・ベルグの定理)] 145
問題51	1の5乗根……………146	類題51	[1のn乗根] ……149
問題52	1の7乗根……………150	類題52	[1の7乗根] ……152
問題53	$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \sum_{k=0}^n \sin k\theta$ ……154	類題53	……………155
問題54	複素数平面の図形への応用……………156	類題54	……………157
問題55	平行・直交条件……………158	類題55	……………161
問題56	三角形の相似条件と正三角形……………162	類題56	[三角形の形状] ……165
問題57	共線・共円条件……………166	類題57	[共円条件] ……167
問題58	1次分数変換……………168	類題58	[反転] ……171
問題59	複素数の点列の極限への応用……………172	類題59	……………173
問題60	$w = z^2$ ……174	類題60	……………177

この本に登場する有名曲線……………178

(注) 問題文の右肩の◆印はやや難問を表します。入試問題の出題大学名は現行の大学名にしてあります。[例] 高知医科大→高知大 [医]



### 問題 54 複素数平面の図形への応用

四角形 ABCD の各辺を斜辺とする直角二等辺三角形 ABP, BCQ, CDR, DAS を四角形の外側につくるとき、次の問に答えよ。

(1)  $\overline{PR} = \overline{QS}$ ,  $PR \perp QS$  であることを証明せよ。

(2) 四角形 PQRS が正方形となるための四角形 ABCD の形状を求めよ。

(札幌医科大, 新潟大 [医])

#### 【考え方】

$\overline{PR} = \overline{QS}$  かつ  $PR \perp QS$  を示すには  $\overline{PR}$  を  $90^\circ$  または  $-90^\circ$  回転したものが  $\overline{QS}$  になることを示します。複素数平面上において点 A, B を表す複素数がそれぞれ  $\alpha, \beta$  のとき、ベクトル  $\overline{AB}$  に対して複素数  $\beta - \alpha$  が対応するので、この参考書ではそれを  $\overline{AB}(\beta - \alpha)$  と表すことにします。

#### 【解答】

複素数平面上で考える。

A, B, C, D は反時計まわりとしてよい。

A, B, C, D, P, Q, R, S を表す複素数をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q, r, s$  とする。

$\overline{PB}(\beta - p)$  は  $\overline{PA}(\alpha - p)$  を点 P のまわりに  $-90^\circ$  回転したものであるから

$$\beta - p = -i(\alpha - p).$$

よって、

$$\begin{aligned} p &= \frac{\beta + i\alpha}{1 + i} \\ &= \frac{1}{2}(\beta + i\alpha)(1 - i) \\ &= \frac{1}{2}\{\alpha + \beta + i(\alpha - \beta)\}. \end{aligned}$$

同様にして、

$$q = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + i(\beta - \gamma)).$$

$$r = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + i(\gamma - \delta)).$$

$$s = \frac{1}{2}(\delta + \alpha + i(\delta - \alpha)).$$

よって、 $\overline{PR}(r - p)$ ,  $\overline{QS}(s - q)$  は次のようになる。

$$\begin{cases} r - p = \frac{1}{2}\{-\alpha - \beta + \gamma + \delta + i(-\alpha + \beta + \gamma - \delta)\}, \\ s - q = \frac{1}{2}\{\alpha - \beta - \gamma + \delta + i(-\alpha - \beta + \gamma + \delta)\}. \end{cases}$$

これらより、

$$s - q = i(r - p)$$

となるから、 $\overline{PR}$  を  $90^\circ$  回転したものが  $\overline{QS}$  である。

ゆえに、

$$\overline{PR} = \overline{QS} \text{ かつ } PR \perp QS$$

である。

