はじめに

この問題集は，数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，C(ベクトル) の教科書をひと通り終え，これから本格的に受験勉強を始める文系の受験生を対象としています．

河合出版では毎年，その年の入試問題の中から厳選された問題を集めた『大学入試攻略数学問題集』を出版しています．この『大学入試攻略数学問題集』を過去30年以上に渡って精査し，さらに厳選を重ねてこの問題集を作成しました．いわば，この30年間の入試問題の集大成と言えるでしょう．特別な難問やありふれた易問は極力避け，効率よく大学入試に対応できるような問題が160題収録されています．

一部理系の大学の問題も収録されていますが，これは大学名で選んだわけではなく，あくまで入試に必要な学力を効率良く伸ばすという観点で選んだためです．

解答はできるだけ自然なものを心がけました．ここで提示された解法は是非とも身につけてもらいたいものばかりです．

問題によっては，〈方針〉，(別解)，【注】，〔参考〕 などもつけ，その1題をより深く理解できるようにしました．

なお，問題の主旨を変えない範囲で問題文の表現を変更したものには問題番号に＊が，また，問題の主旨を若干変えたものには出典大学に 改 の字がついています．

この問題集を大いに活用して，ゆるぎない実力が養成されることを期待します．

問題編

目次

数　学　I・A ………………………… 4

数　学　II ………………………… 23

数　学　B ………………………… 46

数　学　C ………………………… 57

14 —(方針)

空間図形の各面に着目する．

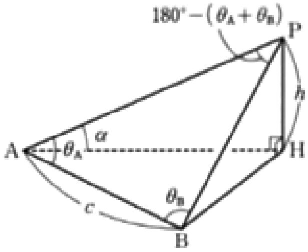


図 1

(1) 点 P から地面に下ろした垂線の足を H とする．

$\triangle$PAB について，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\theta_B}=\frac{c}{\sin\{180^\circ-(\theta_A+\theta_B)\}}.$$

よって，

$$\mathrm{AP}=\frac{c\sin\theta_B}{\sin(\theta_A+\theta_B)}.$$

$\triangle$PAH において，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}&=\mathrm{AP}\sin\alpha\\&=\boldsymbol{\frac{c\sin\theta_B\sin\alpha}{\sin(\theta_A+\theta_B)}}.\end{aligned}$$

(2)

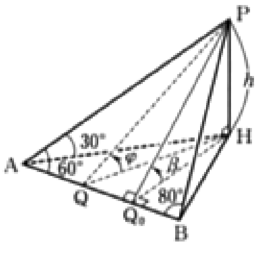


図 2

線分 AB 上を動く点を Q，$\angle$PQH$=\varphi$ とする．

$\alpha=30^\circ$，$\theta_A=60^\circ$，$\theta_B=80^\circ$ のとき，h は一定で，$0^\circ<\varphi<90^\circ$ であるから，

$$\varphi\text{ が最大} \iff \sin\varphi=\frac{h}{\mathrm{PQ}}\text{ が最大}$$
$$\iff \mathrm{PQ}\text{ が最小}.$$

PQ が最小になるのは

$$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$$

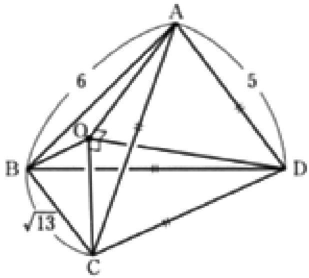
のときで，このときの Q を Q_0 と表すと，$\theta_A=60^\circ$，$\theta_B=80^\circ$ より Q_0 は線分 AB 上の点で，

$$\mathrm{PQ_0}=\mathrm{PA}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PA}.$$

φ の最大値が β だから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sin\beta}&=\frac{h}{\mathrm{PQ_0}}\\&=\frac{\mathrm{AP}\sin 30^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PA}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

15



(1) 余弦定理から，

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}\\&=\frac{6^2+5^2-13}{2\cdot6\cdot5}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

よって，

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

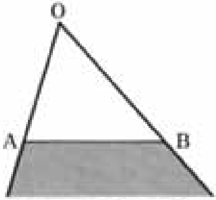
であるから，$\triangle$ABC の面積は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A&=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{3}{5}\\&=\boldsymbol{9}.\end{aligned}$$

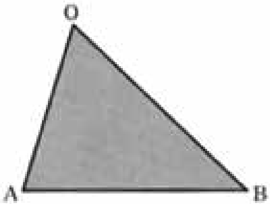
(2) DA=DB=DC(=5) であるから，点 D から平面 ABC に垂線 DO を下ろすと，

145 —〈方針〉

(ア)
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\geqq 1\end{cases}$$
のとき，点Pの存在範囲は下図の網掛け部分(境界を含む).



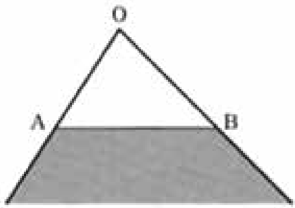
(イ)
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1\end{cases}$$
のとき，点Pの存在範囲は下図の網掛け部分(境界を含む).



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

(1) (i) $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\geqq 1$ のとき.

Pの存在し得る領域は，次図の網掛け部分(境界を含む)である.

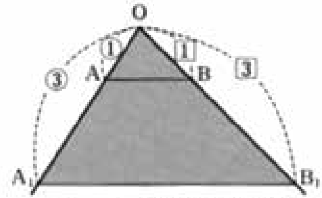


(ii) $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 3$ のとき.
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}\leqq 1.\end{cases}$$

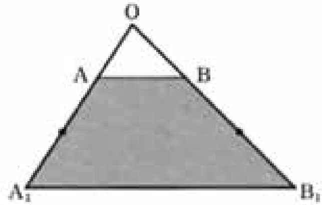
$s_1=\dfrac{s}{3}$, $t_1=\dfrac{t}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

とおくと,
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_1\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+t_1\overrightarrow{\mathrm{OB_1}},\\ s_1\geqq 0,\ t_1\geqq 0,\ s_1+t_1\leqq 1.\end{cases}$$

したがって，Pの存在し得る領域は，次図の網掛け部分(境界を含む)である.



(i), (ii)より，Pが存在し得る領域は，次図の網掛け部分(境界を含む)であり，その面積は,
$$3^2S-S=8S$$
より，S の $\boxed{8}$ 倍である.



(2) $1\leqq s+2t\leqq 3$ のとき.
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right),\\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ 1\leqq s+2t\leqq 3.\end{cases}$$

$t_2=2t$, $\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_2\overrightarrow{\mathrm{OB_2}},\\ s\geqq 0,\ t_2\geqq 0,\ 1\leqq s+t_2\leqq 3.\end{cases}$$

よって，(1)と同様にして，Pが存在し得る領域は，次図の網掛け部分(境界を含む)であり，その面積は,
$$3\cdot\frac{3}{2}S-\frac{1}{2}S=4S$$
より，S の $\boxed{4}$ 倍である.