はじめに

この問題集は，数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ，Cの教科書をひと通り終え，これから本格的に受験勉強を始める理系の受験生を対象としています．

河合出版では，毎年，その年の入試問題の中から厳選された問題を集めた『大学入試攻略数学問題集』を出版していますが，この『大学入試攻略数学問題集』を過去 30 年以上に渡って精査し，さらに厳選を重ねてこの問題集を作成しました．いわば，この 30 年間の入試問題の集大成と言えるでしょう．特別な難問や，ありふれた易問を避け，効率よく大学入試に対応できるような問題が 272 題収録されています．

解答は，なるべくテクニカルなものを避け，できるだけ自然なものを心がけました．ここで提示された解法は，是非とも身につけてもらいたいものばかりです．

また，問題によっては，〈方針〉，(別解)，【注】，〔参考〕 などもつけ，その１題をより深く理解できるようにしました．

なお，問題の主旨を変えない範囲で問題文の表現を変更したものには問題番号に＊が，また，問題の主旨を若干変えたものには出典大学に 改 の字がついています．

この問題集を大いに活用して，ゆるぎない実力が養成されることを期待します．

問題編

目次

175 ―〈方針〉

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線は,

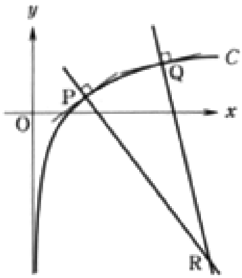
$$\begin{cases} f'(a)\neq 0 \text{ のとき,} \\ \qquad y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a). \\ f'(a)=0 \text{ のとき,} \\ \qquad x=a. \end{cases}$$

また,

$$\lim_{q\to x}\frac{\log q-\log x}{q-x}=\frac{d}{dx}\log x$$

($\log x$ の導関数の定義)

$$=\frac{1}{x}.$$



$C:y=\log x$

より,

$$y'=\frac{1}{x}.$$

$\mathrm{P}(p,\ \log p)$ における C の法線は,

$$y-\log p=-p(x-p),$$

すなわち,

$$y=\boxed{-px+p^2+\log p}. \quad \cdots①$$

$\mathrm{Q}(q,\ \log q)$ における C の法線は, 同様にして,

$$y=-qx+q^2+\log q. \quad \cdots②$$

① と ② の交点 R の x 座標は, ①−② より,

$$0=-(p-q)x+p^2-q^2+\log p-\log q$$

となり,

$$x=\boxed{p+q+\frac{\log p-\log q}{p-q}}.$$

$q\to p$ とすると,

$$\lim_{q\to p}\left(p+q+\frac{\log p-\log q}{p-q}\right)$$

$$=2p+\frac{d}{dp}\log p$$

$$=2p+\frac{1}{p}.$$

以上により, $q\to p$ のとき, 点 R の x 座標は,

$$\boxed{2p+\frac{1}{p}}$$

に限りなく近づく. これを ① に代入すると, R の y 座標が限りなく近づく値は,

$$y=-p\left(2p+\frac{1}{p}\right)+p^2+\log p$$

$$=\boxed{-p^2-1+\log p}.$$

176 ―〈方針〉

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において, $f'(x)$ の符号が正から負に変わる箇所があればよい.

$$f(x)=\frac{a-\cos x}{a+\sin x}.$$

$$f'(x)=\frac{(a+\sin x)\sin x-(a-\cos x)\cos x}{(a+\sin x)^2}$$

$$=\frac{a(\sin x-\cos x)+1}{(a+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{(a+\sin x)^2}.$$

$g(x)=\sqrt{2}\,a\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ とおく.

$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値をもつ条件は,

$f(\alpha)$ が存在し, $x=\alpha$ で
$f'(x)$ の符号が正から負に変わる

ことである.

$(a+\sin x)^2\geqq 0$ より, これは,

$$a+\sin\alpha\neq 0 \quad \cdots①$$

かつ,

$x=\alpha$ で $g(x)$ の符号が正から負に変わる $\quad\cdots②$

ことと同値である.

250 —〈方針〉

・極形式で表すと z^3 をド・モアブルの定理で計算できる.
・「z が実数 $\iff z=\overline{z}$」を用いてもよい.

$|z|=1$ より,
$$z=\cos\theta+i\sin\theta\quad(0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$$
とおけるから, ド・モアブルの定理より,
$$\begin{aligned}z^3&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos3\theta+i\sin3\theta.\end{aligned}$$
これより,
$$\begin{aligned}&z^3-z\\&=(\cos3\theta+i\sin3\theta)-(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos3\theta-\cos\theta)+i(\sin3\theta-\sin\theta).\end{aligned}$$
z^3-z は実数であるから,
$$\sin3\theta-\sin\theta=2\cos2\theta\sin\theta=0.$$
よって,
$$\cos2\theta=0\ \text{または}\ \sin\theta=0.$$
$$\theta=0^\circ,\ 45^\circ,\ 135^\circ,\ 180^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ.$$
求める z は $\boxed{6}$ 個あって, それらは,
$$\boxed{\begin{matrix}1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\\ -1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\end{matrix}}.$$

(別解)

z^3-z が実数となる条件は,
$$z^3-z=\overline{z^3-z}.$$
これを整理すると,
$$z^3-z=\overline{z}^3-\overline{z}.$$
$$(z-\overline{z})(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2)=z-\overline{z}.$$
$$(z-\overline{z})(z^2+1+\overline{z}^2)=z-\overline{z}.$$
$$(z-\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)=0.$$
$$z=\overline{z}\ \text{または}\ z^2+\overline{z}^2=0.$$
(i) $z=\overline{z}$, すなわち, z が実数のとき.
$|z|=1$ より,
$$z=\pm1.$$
(ii) $z^2+\overline{z}^2=0$ のとき.
$|z|=1$ より,
$$|z|^2=z\overline{z}=1.\qquad\cdots①$$
また,
$$z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2=0.$$
$$z+\overline{z}=\pm\sqrt{2}.\qquad\cdots②$$
①, ② より, z, $\overline{z}$ は t の2次方程式
$$t^2\mp\sqrt{2}t+1=0$$
の解であるから,
$$z=\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}\quad(\text{複号任意}).$$
(i), (ii) から, 求める z は $\boxed{6}$ 個あり, それらは
$$\boxed{\begin{matrix}1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\\ -1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\end{matrix}}.$$
(別解終り)

251 —〈方針〉

(1) $\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ を利用する.
(2) $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$ より $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$. これと(1)を利用する.
(3) $z=\cos72^\circ+i\sin72^\circ$ とおき, ド・モアブルの定理を利用する.

(1) $\alpha^5=1$ より,
$$\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0.$$
$\alpha\neq1$ であるから,
$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0.$$
$\alpha\neq0$ であるから両辺を α^2 で割って,
$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0.\qquad\cdots①$$

(2) ① より,
$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+1=0.$$
$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1=0.\qquad\cdots②$$
$|\alpha|=1$ より, $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$ であるから,
$$\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$