はじめに

ある日，**河合塾札幌校**での授業が終わったあと，講師室に一人の生徒が少し思いつめた表情をして質問(相談？)をしにやって来ました．

「先生，私，今の授業でやったような

図形からスタートする数Ⅲの微分の問題がいつも解けません．

どうしたらいいでしょうか…？

何かおすすめの問題集や参考書はないでしょうか？」

と言います．もう少し詳しく聞いてみると，数学Ⅲの典型問題(例えば，微分してグラフを描くなど)はできるそうで，そこそこの計算力も持っているとのこと．また，センター試験の三角比などのいわゆる「図形問題」もそれなりに解けるらしい….

そのような要求に即した一人でトレーニングができる問題集などはなかなか無いもので，「残念ながら，いい本はないね～.」と私が返すと「それじゃ，今，授業でやった問題を何度も繰り返しやった方がいいのですか？」と問われ，「でも，もうこの問題はどうすればこの図形の面積が求まり，そのあと微分をして最大値を求めるという流れは，わかってしまっているのでしょう？それじゃ，つまんないよね～．どうしようか？…」

となって，その場は終わりになってしまいました．

似たような状況が過去に何度かあり，なんとかならないものかなぁ…と思っていたので，

「無いならば，それじゃ自分で作ってしまえばいいじゃない!!」

ということから本書の企画がスタートしました．コンセプトは

「『図形』を中心とするが，数学Ⅲなどの他分野との融合問題も多く取り入れた

“今までにない新しいタイプの理系受験生用の問題集”

を作ろう！」

です．したがって，この問題集の企画のスタートとなった「数学Ⅲの微分法や極限との融合問題」はもちろん積極的に採用し，さらに「補助線を引いたり，相似を利用する」などの多くの人がイメージするいわゆる純粋な『図形問題』の問題数を減らして自分で座標やベクトルなどを導入するといった最近の入試でよく見かける『図形問題』を中心に据えてみました．そのため，どこか１つの分野を集

中して学びたいといったニーズには応えていないかもしれませんが，最近の理系入試の現状には比較的マッチしていると思います．

また，試験場で問題を初めて見たとき，パッと見ただけではどの分野の問題かがわからないという『図形問題』も入れてみました．「使う道具を問題文からだけではなく，与えられた条件などより図をかいてみてそこから読み取る」といった感じの問題です．さらに，座標が入っているのに座標計算しない方がいいという問題や，ベクトルで条件が与えられているのにほとんどベクトルを使わない方がいいといった「**一種の裏切り**」のような問題も入れてあります．入試ではそういう問題に出会うということも大いにありえます．一緒にこの問題集で裏切られましょう！（笑）

本書は教科書の単元とは無関係に作成しましたので，高校数学全般を総合的に扱います．したがって，必然的に本書の対象者は「理系の受験生」になるかと思います．（もちろん，意欲的な文系の受験生が自力で解ける問題だけを解くのは大歓迎です！）

本書の利用の仕方

勉強の仕方にルールなんて無いのですが，「本書の利用の仕方」について少しだけ述べておきます．

① まず，筆記用具を手に持ち，横に紙を置いてから，問題文を読み，**解答を見ないで，25 分は闘うこと**．入試における 1 題あたりの解答時間：25～30 分は「あれを使ってみてはどうだろうか？」とか「ここでこの部分にだけ注目してこの定理を使ってみよう！」など，いろいろやってみて，もがき，苦しんで下さい．その経験があとで必ず活きてきます．

② 時間になったら筆記用具を赤ペンに持ち替えて，自分の解答のおかしな部分を修正しながら，本書の解答を読み進めていって下さい．もし，何もできていないのであれば，解答をまず書き写してみて下さい．そのとき，できるだけ**頭を動かしながら**進めて下さい．頭を動かさない「書き写し」はあなたではなくても誰でもできます．お金を出せば『コピー機』だってやってくれます．勉学に忙しいあなたがする必要はありません．**必ず，考えながら進めて下さい**．「どうしてこんな変形をするのだろう？」とか「なぜ，ここでこの定理を使うのかな？」などを考えながら，本書の解答を味わってみて下さい．問題によっては別解も多数あ

ります．それもできれば同時に学習して下さい．「最初の解とはどこが違うのか？」「どうしてこんな別解が思いつくのか？」などを味わうのが最もいいのは，『初めて問題と真剣に向き合ったとき』だと私は思います．時間がかかるかもしれませんが，１題の問題の学習は細切れにせずに一気にしてしまって下さい．

③ もし，全く手が出ないときは，本書の解答の最初にある「ワンポイントアドバイス」を見てからもう少し考えるのも一つの方法かもしれません．ここには解答をスタートさせるうえでの**『解法の選択の動機』**が書かれていることが多く，いわゆる**「ヒント」**になっていることも多いです．たとえ解けてしまったときでもぜひ読んで下さい．

④ 最後に「解説」を読んで下さい．いわゆる『総括』が書かれています．頭を整理する意味でもきちんと読んでみて下さい．場合によっては問題の『背景』について述べていることもありますし，それなりに『ためになること』が書かれていると思います．問題が解けた（数値が合っていた）からといってすぐに次の問題に移るのではなく，少し時間をかけることによってその問題で学んだことを身体に染み込ませて定着させる努力をしてから，次の問題に進んでほしいと思っています．

⑤ 一通りの学習が終わったら，もう一度，全問題を解きなおしてほしいと思います．数学の問題は，たった一度解いただけではその問題の良さやその問題から学ぶことを十分に掴めないものです．二回，三回と繰り返し解いてほしいと思っています．また，二回目以降のときは，**『完成度の高い解答』**を作るように心がけて用紙（ノート）に解答を書いていってほしいと思います．ここでいう**『完成度の高い解答』**とは，単なる数式の羅列ではなく，"思考の流れ・論理の流れ"がわかるように言葉・文章を補い，**『数学の作文』**をしようと心がけて作ったものを言います．この「答案を書く」という作業を「**『数学の作文』**をすることだ」と表現したのは，私の大学院時代の師匠である数学では世界的にも有名なＧ教授です．それを聞いたとき実に適切な表現だと私は思い，以後，いろいろな場面で使うようにしています．**『数学の作文』**は１日や２日では書けるようにはなりません．できるだけ早い時期から練習をして，試験に臨んでほしいと思っています．

もくじ

第１章　図形問題の基礎(４題) ･･････････････ 8
＊平面図形において『相似と三角比』を中心として

第２章　平面図形(13 題) ･･････････････ 10
＊「円と三角形」を中心として

第３章　空間図形(10 題) ･･････････････ 16
＊「球面と四面体」を中心として

第４章　融合問題(17 題) ･･････････････ 21
＊数学Ⅲとの融合

第５章　分野不明問題(13 題) ･･････････････ 29
＊いろいろな分野の知識を総動員しよう

第６章　演習問題(13 題) ･･････････････ 35
＊第１章～第５章の総合演習

第 2 章

この章では，「円と三角形」を中心とした「平面図形」の問題を扱う．第1章でいろいろな道具を確認したが，問題を解くにあたって「適切な」道具を選ぶことは重要である．その場・その場で「適切な」道具を使ってもらいたいと考えるので，この章からは，第1章と異なり，私が考える「適切な」解法の解答を紹介していくことにする．したがって，解けなかった者は，解法をまるごと覚えるくらいの気持ちで，徹底的に復習してほしい．

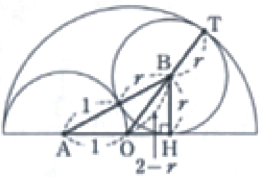
5

ワン ポイント アドバイス

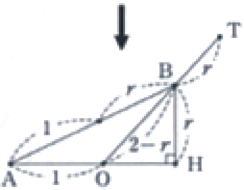
やさしめな問題の演習を通じて，円の問題の基本を学ぼう！

解答

(1)



左の図のように点を定める．



$\triangle$OHB に三平方の定理を使うと

$$\mathrm{OH}=\sqrt{(2-r)^2-r^2}=2\sqrt{1-r}$$

$\triangle$AHB に三平方の定理を使うと

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+2r}$$

$1+\mathrm{OH}=\mathrm{AH}$ が成り立つので，

$$1+2\sqrt{1-r}=\sqrt{1+2r}$$

両辺正であるから2乗すると

$$1+4\sqrt{1-r}+4(1-r)=1+2r$$

$$2\sqrt{1-r}=3r-2 \qquad \cdots ①$$

再び両辺2乗して

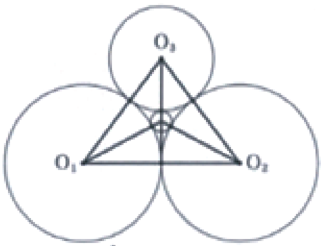
$$4(1-r)=9r^2-12r+4$$

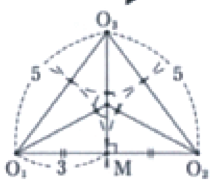
$$r(9r-8)=0$$

$r>0$ より $r=\boxed{\dfrac{8}{9}}$

これは ① を満たすので適する．

(2)





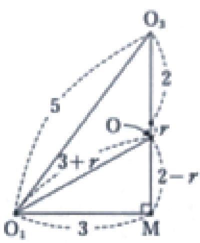
$\mathrm{O_1O_2}$ の中点を M とすると

$$\angle \mathrm{O_1MO_3}=\frac{\pi}{2}$$

であるから，

$\triangle \mathrm{O_1MO_3}$ に三平方の定理を使うと

$$\mathrm{O_3M}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$



したがって，円 O の中心を O，半径を r とすると，

$OO_1=3+r$，$OM=4-(2+r)$

$=2-r$

であるから，$\triangle OO_1M$ に三平方の定理を使うと

$$(3+r)^2=3^2+(2-r)^2$$
$$9+6r+r^2=9+4-4r+r^2$$
$$10r=4$$
$$r=\boxed{\frac{2}{5}}$$

解説

円の問題の解法の手順

① **円をできるだけ大きくかく．**

・図は，かきにくいものからかく．
・図は，できるだけ大きくかく．

これは「図形問題の基本」である

（直線のみでできている「直線図形」と，曲線でできている「曲線図形」では，一般に，「曲線図形」の方がフリー・ハンドでかくのは難しい．まず「曲線図形」からかいた方が図を仕上げやすい．）

② **中心を記入する．**

③ **円と直線が「交わっている」または「接している」ときには，中心から直線へ垂線を下ろす．**

（このとき，いわゆる「垂線の足」は，「交わっている」ときは，円によって切り取られる弦の中点と一致し，「接している」ときは，円と直線の接点と一致する．）

④ **中心と大事な点を結ぶ．**

（図形に対称性があるときは，どちらか一方のみでよいことが多い．）

⑤ **半径を記入する．**

（わかっていないときは，文字で与えて，それを記入する．）

上のような手順で図をかいて，あとは手を止めて考えることになるのだが，この段階で

「円は，いらなくなる」

ことが多い．できあがった図形の中の「直線図形」の部分に着目し，「三平方の定理」や「三角比の定義」を用いて立式すると，うまくいく．

また，座標が設定されている問題でも，いわゆる「図形問題」つまり「円の問題」として処理できるものも多い．したがって，まず「円の問題」と捉えて図をかいて考えるのが先で，急いで座標の計算に入らないようにすべきである．このようなとき，図形の性質を見るためには，

「座標軸はいらない」

と考えておくべきである．

したがって，円の問題では，上の手順に沿って考え，状況によって

「円弧を消す」　や　**「座標軸を消す（最初からかかない）」**

と覚えておきたい．