# Chapter 9

# 平面上の曲線と複素数平面

## 9

| B | 解答時間 12 分 |
|---|---|

解説 327ページ

$i$ は虚数単位とする．複素数 $w$ と 0 でない複素数 $z$ が

$$w=z+\frac{2}{z}$$

を満たしている．

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=x+yi$（$r$ は正の実数，$\theta$，$x$，$y$ は実数）とおくとき，$x$，$y$ を $r$，$\theta$ を用いて表すと，

$$x=\boxed{\text{ア}},\quad y=\boxed{\text{イ}}$$

となる．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ $\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$　① $\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta$　② $\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$　③ $\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta$

④ $\left(\dfrac{2}{r}-r\right)\sin\theta$　⑤ $\left(\dfrac{2}{r}-r\right)\cos\theta$　⑥ $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$　⑦ $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$

(1) 複素数平面上で，点 $z$ が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，$r=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，点 $w$ が描く曲線の概形は $\boxed{\text{エ}}$ となる．

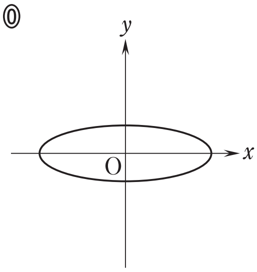
(2) $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ とする．

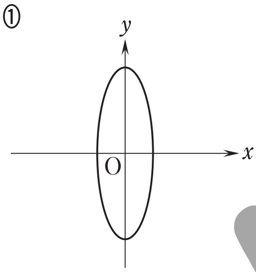
このとき，

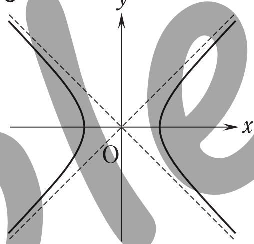
$$x-y=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,r,\qquad x+y=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{r}$$

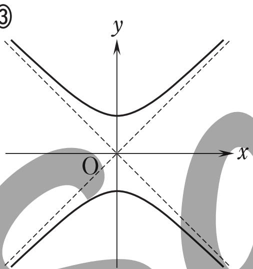
となり，さらに，複素数平面上で点 $z$ が $r>0$ を満たして動くとき，点 $w$ が描く曲線の概形は $\boxed{\text{ク}}$ となる．

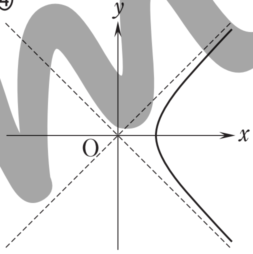
$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ． ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

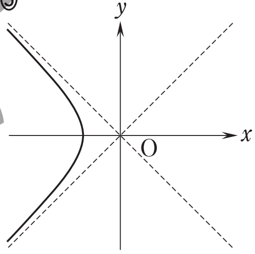
⓪



①



②



③



④



⑤





| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

# 9

| 解答記号 | | 正　解 | チェック |
|---|---|---|---|
| ア | | ① | |
| イ | | ② | |
| (1) | $r=$ ウ | $r=\mathbf{2}$ | |
| | エ | ⓪ | |

| 解答記号 | | 正　解 | チェック |
|---|---|---|---|
| (2) | $x-y=\sqrt{\text{オ}}\,r$ | $x-y=\sqrt{\mathbf{2}}\,r$ | |
| | $x+y=\dfrac{\text{カ}\sqrt{\text{キ}}}{r}$ | $x+y=\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}{r}$ | |
| | ク | ④ | |

**【解説】**

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $w=z+\dfrac{2}{z}$ に代入すると，

$$\begin{aligned} w&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{2}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\ &=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\theta. \end{aligned}$$

一方，$w=x+yi$ であり，$x$，$y$，$\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta$，$\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$ は実数であるから，

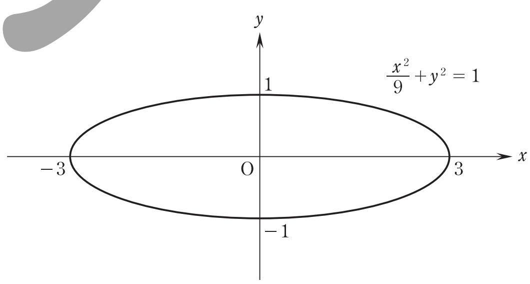
$$x=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\theta,\qquad y=\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\theta. \qquad \cdots①$$

したがって，$\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{①}$ が，$\boxed{\text{イ}}$ には $\boxed{②}$ がそれぞれ当てはまる．

(1)　点 $z$ が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，$r=\overset{\text{ウ}}{\boxed{2}}$ であり，これを ① に代入すると，

$$x=3\cos\theta,\qquad y=\sin\theta. \qquad \cdots②$$

$xy$ 平面上において，座標が ② で表される点 $(x,\ y)$ の軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ である．




したがって，$\boxed{\text{エ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

(2)　$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ を ① に代入すると，

$$x=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),\qquad y=\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

←
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\ &=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &=\cos\theta-i\sin\theta. \end{aligned}$$

ド・モアブルの定理を用いて求めてもよい．

$$\begin{aligned} &(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\\ &=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\\ &=\cos\theta-i\sin\theta. \end{aligned}$$

← ②より，

$$\cos\theta=\frac{x}{3},\qquad \sin\theta=y.$$

これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると，

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1.$$

逆に，これを満たすどの $(x,\ y)$ に対しても ② を満たす実数 $\theta$ は存在する．

すなわち，

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right),\qquad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right) \qquad \cdots③$$

であるから，

$$x-y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right)-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{\overset{\text{オ}}{\boxed{2}}}\,r, \qquad \cdots④$$

$$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right)+\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right)\right\}$$

$$=\frac{\overset{\text{カ}}{\boxed{2}}\sqrt{\overset{\text{キ}}{\boxed{2}}}}{r}. \qquad \cdots⑤$$

④ より，

$$r=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \cdots④'$$

であり，さらに，$r>0$ であるから，

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}>0.$$

よって

$$y<x. \qquad \cdots⑥$$

また，④′ を ⑤ に代入すると，

$$x+y=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{x-y}{\sqrt{2}}}\quad\left(=\frac{4}{x-y}\right).$$

両辺に $x-y$ を掛けて

$$(x+y)(x-y)=4 \qquad \text{つまり} \qquad x^2-y^2=4.$$

したがって

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1. \qquad \cdots⑦$$

⑥，⑦ より，$xy$ 平面上において，③ で表される点 $(x,\ y)$ の軌跡は，双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ の $y<x$ を満たす部分である．

← $r>0$ であることに注意しよう．
⑤ と $r>0$ から

$$x+y>0$$

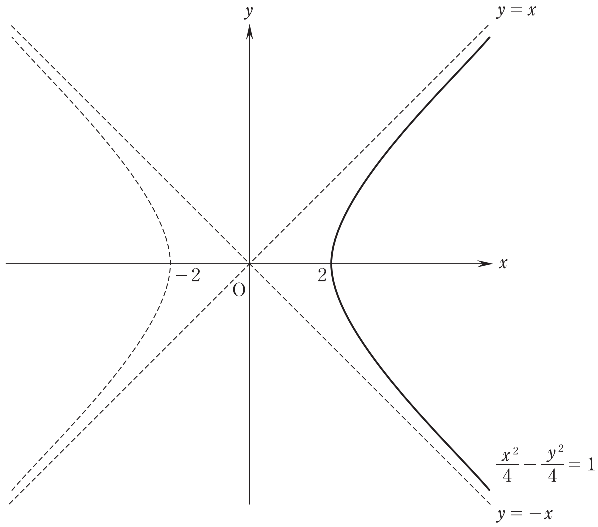
を導いて，⑥ の代わりに用いてもよい．

← ④，⑤ の辺々を掛けると，

$$(x-y)(x+y)=\sqrt{2}\,r\cdot\frac{2\sqrt{2}}{r}.$$

このようにして，$x^2-y^2=4$ を得ることもできる．

← ⑥，⑦ を満たすどの $(x,\ y)$ に対しても，④′ により，④，⑤ を満たす正の数 $r$ は存在する．




したがって，$\boxed{\text{ク}}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

← 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ の漸近線は，直線 $y=x$ と直線 $y=-x$ である．