

高校で学ぶ数学は易しくありません。これまで数学ⅠAⅡBを学んできて、すでに息切れしてしまいそうな人もいるかも知れませんね。しかし、数学Ⅲ・Cまで出題される理系学部を志望する人は「ここからが勝負」と言っても過言ではありません。理系学部の入試では数学Ⅲ・Cの出題比率は高く、しかも、小問集合ではなく、配点の大きい大問として出題されることが多いので、数学Ⅲ・C（特に、微分法・積分法）の出来が入試の結果を大きく左右することになるわけです。

理系に進みたい人には非常に重要になってくる数学Ⅲ・Cですが、入試で得点源にしていくためのアドバイスを少しだけしておきます。それと合わせて、本書の使い方を紹介します。

## 1. 強靱な計算力を身につける

数学Ⅲ・Cの出題テーマは数学ⅠAⅡBほど多彩なものではありません。たとえば、微分法・積分法であれば、グラフや最大最小、面積や体積といった主要テーマが入試でも数多く出題されていて、解答の方針は比較的立てやすいのです。しかし、数学ⅠAⅡBに比べると、特に積分などで計算量が多く、せっかく正しい式を立てることができても、それを正しく計算できずに得点できなくなってしまうことがよくあります。

したがって、数学Ⅲ・Cの勉強の第一歩として「しっかりと計算練習を行い、強靱な計算力を身につけること」が大切になってきます。そのための勉強として、模範解答を読んで終わりにするのではなく、模範解答を読んだ後にもう一度解答を書き直してみるとよいでしょう。書き直しをすることで、内容が理解できているかを確認できると同時に計算練習もすることができます。

また、巻末の演習には、極限や定積分の計算のようなシンプルな問題を何題か掲載しているので、それらも必ず解くようにしましょう。

## 2. 反復練習をする

数学に限ったことではありませんが、何度も繰り返し練習を行うことで、最初はできなかったことでも次第にできるようになっていくものです。特に、微分を用いてグラフを描くことや、定積分の計算などはスムーズに対応できるようにしておかないといけません。このようなものはある程度手順が決まっているものなので、繰り返し練習をすれば確実にできるようになっていきます。まさに、コツコツと努力することが大切なわけです。

本書では問題文の右上に2つの□が並んでいます。自分の出来に応じて○、△、×などの記号を記入しておき、出来の悪かった問題は、数週間の時間をおいてやり

直しをしてみるとよいでしょう。(数日後に解き直すと、理解していなくても「記憶」だけを頼りに解けてしまうこともあるので、3週間ほど間を空けて解いてみて、そのときに解けたら○にしてみるとよいでしょう)

### 3. 重量感のある問題もじっくりと取り組む

数学Ⅲ・Cの問題は大問で出題されることが多いため、受けやすいレベルの大学であっても、難度の高い問題が出題されることがよくあります。本書でも各単元の後半では、そのような問題を多く扱っています。本書で扱っている問題は「易しくないけれど、何度も出題されている頻出の問題」ばかりですから、皆さんの受験する大学でも似た問題が出されるかも知れません。最初は難しいと感じると思いますが、解答、解説講義をじっくりと読み、考え方のポイントを習得していきましょう。

### 4. 必要に応じて、数学ⅠAⅡBも見直そう

数学Ⅲ・Cの問題を解くなかで、数学ⅠAⅡBの知識を用いることがよくあります。特に、三角関数、指数・対数、数列はきちんと理解していないといけません。本書では紙面の許す範囲で補足的な説明を書き入れてありますが、上記の単元で理解が足りない部分は教科書を見直したりしておきましょう。

また、「文系の数学・重要事項完全習得編」(河合出版)は数学ⅠAⅡB(およびベクトル)の基本事項を確認できる内容となっており、理系の人にもおすすめします。本書よりも少し易しめの問題で構成されていますので、数学に自信が持てない人は基礎を固める目的で利用してみてください。

大学入試では「学力」以上に「努力」が大切です。「努力」することなく「学力」は獲得できません。今、この若い時期に苦勞して獲得した「学力」は皆さんの一生の財産になります。本書は皆さんの「努力」が確実に「学力」の向上につながるように問題を厳選し、解答や解説を執筆しています。あとは、本書を利用して、皆さんが最大限の「努力」をするだけなのです。

さあ、がんばろう！

著者、編集者一同

#### <本書の問題に関して>

1. 一部の問題で、「マーク式」や「穴埋め形式」などの解答形式に関してのみ、原題と変更しているものがありますが、出題の主旨は一切変更していません。
2. 紙面に限りがあるため、原題に書かれている

「 $e$ は自然対数の底とする」、「 $\log$ は自然対数を表す」 …★

という文言を、誤解が発生しない範囲で削除しています。問題文、解答、解説講義内などで断りはありませんが、★であることを前提としていますので、ご了承ください。また、「以下の問に答えよ」といった文言も削除しています。

# 目 次

いろいろな関数	1. 分数関数.....	8
	2. 無理関数.....	10
	3. 無理方程式の解の個数.....	12
	4. 合成関数.....	13
	5. 逆関数.....	14
極限	6. 不定形の極限.....	16
	7. $r^n$ の極限.....	18
	8. 無限級数.....	19
	9. 無限等比級数.....	21
	10. 図形と無限級数.....	22
	11. はさみうちの原理.....	24
	12. 解けない漸化式.....	26
	13. $x \rightarrow a$ のときの関数の極限.....	28
	14. 右側極限と左側極限.....	29
	15. 有限な極限の存在条件.....	30
	16. $x \rightarrow -\infty$ のときの関数の極限.....	31
	17. 三角関数の極限 (1).....	32
	18. 三角関数の極限 (2).....	34
	19. 三角関数の極限の応用.....	36
	20. $e$ の定義.....	38
	21. 連続.....	40
	微分法	22. 導関数の定義.....
23. 積の微分, 商の微分.....		44
24. 合成関数の微分.....		45
25. 微分の計算練習, 第2次導関数.....		46
26. いろいろな微分 (1).....		48
27. いろいろな微分 (2).....		50
28. いろいろな微分 (3).....		51
29. 接線, 法線.....		52
30. 共有点における共通接線.....		53
31. 媒介変数表示 (接線).....		55
32. 増減と極値.....		56
33. 極値と最大・最小 (1).....		58
34. 極値と最大・最小 (2).....		60
35. 極値についてのいろいろな問題.....		62
36. 極値をとる $x$ の値を文字でおく.....		64
37. グラフの作成.....		66
38. グラフの作成 (凹凸と変曲点).....		68
39. グラフの作成 (媒介変数表示の関数のグラフ).....		70
40. 方程式の実数解とグラフの共有点.....		72
41. 接線の本数.....		74
42. 微分法の不等式への応用 (1).....		76

## 積分法

43.	微分法の不等式への応用(2)	78
44.	微分法の不等式への応用(3)	80
45.	平均値の定理	82
46.	基本的な積分の計算	84
47.	置換積分	86
48.	部分積分	88
49.	三角関数の積分の手法	90
50.	分数関数の積分の手法	92
51.	$x = a \sin \theta$ , $x = a \tan \theta$ とおく置換積分	94
52.	偶関数と奇関数の性質, 区間対称な積分	96
53.	覚えておきたい積分の計算	98
54.	定積分漸化式	100
55.	絶対値を含む関数の定積分	103
56.	積分方程式(定積分で表された関数)	106
57.	面積の基本	108
58.	交点を文字でおく	110
59.	減衰曲線(面積)	112
60.	$x$ 軸まわりの回転体の体積	114
61.	回転軸をまたぐ回転体	116
62.	$y$ 軸まわりの回転体(手法1)	118
63.	$y$ 軸まわりの回転体(手法2)	120
64.	媒介変数表示(面積, 体積)	122
65.	非回転体の体積	124
66.	曲線の長さ	126
67.	曲線の式を作る	128
68.	区分求積法	130
69.	積分と不等式(1)	132
70.	積分と不等式(2)	134
71.	積分と不等式(3)	136
72.	水の問題	138
73.	速度, 加速度, 道のり	140
74.	同一直線上の3点, 内分の公式	142
75.	交点のベクトル	143
76.	点の位置を読み取る(内分の公式の応用)	145
77.	ベクトルの内積と大きさ	146
78.	直交条件(直線に垂線を下ろす)	148
79.	三角形の面積	150
80.	直線のベクトル方程式	151
81.	直線と平面の交点	152
82.	平面に下ろした垂線	154
83.	共役な複素数, 複素数の絶対値	156
84.	複素数平面とベクトルの対応(1)	157
85.	複素数平面とベクトルの対応(2)	158
86.	極形式	160
87.	極形式で表された複素数の掛け算, 割り算	161

## ベクトル

## 複素数平面

## 2次曲線

88.	ド・モアブルの定理 (1).....	162
89.	ド・モアブルの定理 (2).....	163
90.	$z^n = a$ の方程式.....	164
91.	次数の高い条件式.....	166
92.	1 の $n$ 乗根.....	168
93.	回転移動.....	170
94.	複素数平面上にある正三角形.....	172
95.	線分の長さ (複素数平面における距離).....	173
96.	複素数平面における軌跡 ( $ z - \alpha  = k z - \beta $ のタイプ).....	174
97.	$w = f(z)$ で表される軌跡.....	176
98.	楕円の基本事項.....	178
99.	2次曲線の平行移動.....	179
100.	双曲線の基本事項.....	181
101.	放物線の基本事項.....	183
102.	2次曲線と直線の位置関係 (1).....	184
103.	2次曲線と直線の位置関係 (2).....	185
104.	2次曲線の接線 (1).....	186
105.	2次曲線の接線 (2).....	188
106.	楕円の接線の応用.....	190
107.	楕円の媒介変数表示.....	192
108.	極座標, 極方程式 (1).....	194
109.	極座標, 極方程式 (2).....	196

■ 演習問題.....	198
-------------	-----

## ■ 別冊

演習問題 解答・解説

## 76 点の位置を読み取る (内分の公式の応用)



面積が1の三角形ABCと点Pに対し、 $5\vec{PA} + 3\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$  が成り立つ。このとき、 $\vec{AP} = \square \vec{AB} + \square \vec{AC}$  と表され、三角形PABの面積は  である。  
(工学院大)

## 解答

$$5\vec{PA} + 3\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0} \text{ より,}$$

$$-5\vec{AP} + 3(\vec{AB} - \vec{AP}) + (\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$$

$$-9\vec{AP} = -3\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{9}\vec{AC}$$

さらに,

$$\vec{AP} = \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。ここで、辺BCを1:3に内分する点をDとすると、①より,

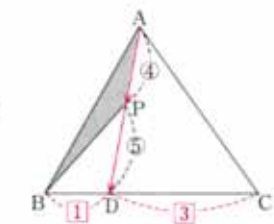
$$\vec{AP} = \frac{4}{9}\vec{AD}$$

となり、 $AP:PD=4:5$  と分かる。

したがって,

$$\Delta PAB = \frac{4}{9}\Delta ABD = \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{4}\Delta ABC\right) = \frac{1}{9}\Delta ABC = \frac{1}{9}$$

※  $BD:DC=1:3$  より



※ ベクトルの引き算を使って始点をAにする。なお、 $\vec{PA} = -\vec{AP}$  である

## 解説講義

前半は、「始点がP」になっている条件式を「始点がA」になるように変形するだけである。始点を変えたいときには「ベクトルの引き算」を用いればよい。引き算を使えば、 $\vec{PQ} = \blacksquare \vec{Q} - \blacksquare \vec{P}$  という形で、始点を好きなところに変えることができる。

後半は、点Pの位置が分からなければ三角形PABの面積を考えることはできないので、前半で得られた $\vec{AP}$ の式を分析して、Pの位置を確定させることを考える。このような「点の位置をベクトルの式から確定させる」ときには、「微調整」して、内分点を表す式を作ってみる」という方法がしばしば用いられる。 $\vec{AP} = \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{9}$  であるが、「分母が9でなく4であれば、内分を表す式になりそうだ」と考えて、 $\frac{4}{9}$ で「微調整」して、解答の①を作るのである。少し難しい考え方であるが、身につけておいて損はないものである。

## 数学C

## の必勝ポイント

ベクトルの式から点の位置を確定させたいときは、  
微調整して、内分点を表す式を作ってみる

$x$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{-1}$	$\searrow$

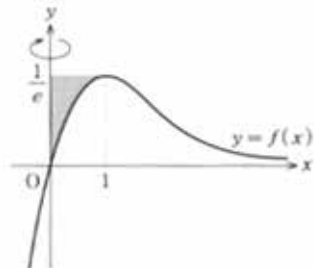
増減表より、 $f(x)$ の最大値は、

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ であるから、}$$

$$f(x) \leq \frac{1}{e}$$

が成り立つ。

- (2) (1)の増減表から、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。求める体積は、図の灰色に塗られた部分を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積である。



$$y = xe^{-x} \text{ より、}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x)e^{-x}$$

$$\therefore dy = (1-x)e^{-x} dx$$

$y$	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{e}$
$x$	0	$\rightarrow$	1

求める体積を  $V$  とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi x^2 dy \\ &= \int_0^1 \pi x^2 (1-x)e^{-x} dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^3)e^{-x} dx \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x^2 - x^3)e^{-x} dx \\ &= \left[ (x^2 - x^3)(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (2x - 3x^2)(-e^{-x}) dx \\ &= 0 + \int_0^1 (2x - 3x^2)e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ (2x - 3x^2)(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (2 - 6x)(-e^{-x}) dx \\ &= \left[ (3x^2 - 2x)e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 (2 - 6x)e^{-x} dx \\ &= e^{-1} + \left[ (2 - 6x)(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (-6)(-e^{-x}) dx \\ &= e^{-1} + \left[ (6x - 2)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 6e^{-x} dx \\ &= e^{-1} + 4e^{-1} - (-2)e^0 - \left[ -6e^{-x} \right]_0^1 \\ &= 5e^{-1} + 2 + 6(e^{-1} - e^0) \\ &= \frac{11}{e} - 4 \end{aligned}$$

したがって、①より、

$$V = \left( \frac{11}{e} - 4 \right) \pi$$

## 76

$0 \leq t \leq \pi$ として、

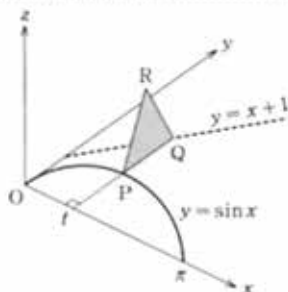
$$P(t, \sin t, 0), Q(t, t+1, 0)$$

とする。このとき、正三角形PQRの面積を  $S(t)$  とすると、 $S(t)$  は、題意の立体を平面  $x = t$  で切断したときの切り口の面積である。

よって、求める体積を  $V$  とすると、 $V$  は、

$$V = \int_0^\pi S(t) dt$$

を計算すればよい。



$0 \leq t \leq \pi$ とする。

点  $P$  が  $(t, \sin t, 0)$ 、点  $Q$  が  $(t, t+1, 0)$  であるときの正三角形PQRの面積を  $S(t)$  とする。

正三角形PQRの1辺の長さは、