本書で学ぶ皆さんの合格を祈って

高校で学ぶ数学は易しくありません．これまで数学ⅠＡⅡＢを学んできて，すでに息切れしてしまいそうな人もいるかも知れませんね．しかし，数学Ⅲ･Ｃまで出題される理系学部を志望する人は「ここからが勝負」と言っても過言ではありません．理系学部の入試では数学Ⅲ･Ｃの出題比率は高く，しかも，小問集合ではなく，配点の大きい大問として出題されることが多いので，数学Ⅲ･Ｃ（特に，微分法・積分法）の出来が入試の結果を大きく左右することになるわけです．

理系に進みたい人には非常に重要になってくる数学Ⅲ･Ｃですが，入試で得点源にしていくためのアドバイスを少しだけしておきます．それと合わせて，本書の使い方を紹介します．

１．強靭な計算力を身につける

数学Ⅲ･Ｃの出題テーマは数学ⅠＡⅡＢほど多彩なものではありません．たとえば，微分法・積分法であれば，グラフや最大最小，面積や体積といった主要テーマが入試でも数多く出題されていて，解答の方針は比較的立てやすいのです．しかし，数学ⅠＡⅡＢに比べると，特に積分などで計算量が多く，せっかく正しい式を立てることができても，それを正しく計算できずに得点できなくなってしまうことがよくあります．

したがって，数学Ⅲ･Ｃの勉強の第一歩として「しっかりと計算練習を行い，強靭な計算力を身につけること」が大切になってきます．そのための勉強として，模範解答を読んで終わりにするのではなく，模範解答を読んだ後にもう一度解答を書き直してみるとよいでしょう．書き直しをすることで，内容が理解できているかを確認できると同時に計算練習もすることができます．

また，巻末の演習には，極限や定積分の計算のようなシンプルな問題を何題か掲載しているので，それらも必ず解くようにしましょう．

２．反復練習をする

数学に限ったことではありませんが，何度も繰り返し練習を行うことで，最初はできなかったことでも次第にできるようになっていくものです．特に，微分を用いてグラフを描くことや，定積分の計算などはスムーズに対応できるようにしておかないといけませんが，このようなものはある程度手順が決まっているものなので，繰り返し練習をすれば確実にできるようになっていきます．まさに，コツコツと努力することが大切なわけです．

本書では問題文の右上に２つの□が並んでいます．自分の出来に応じて○，△，×などの記号を記入しておき，出来の悪かった問題は，数週間の時間をおいてやり

直しをしてみるとよいでしょう．（数日後に解き直すと，理解していなくても"記憶"だけを頼りに解けてしまうこともあるので，３週間ほど間を空けて解いてみて，そのときに解けたら○にしてみるとよいでしょう）

３．重量感のある問題もじっくりと取り組む

数学Ⅲ・Ｃの問題は大問で出題されることが多いため，受けやすいレベルの大学であっても，難度の高い問題が出題されることがよくあります．本書でも各単元の後半では，そのような問題を多く扱っています．本書で扱っている問題は「易しくないけれど，何度も出題されている頻出の問題」ばかりですから，皆さんの受験する大学でも似た問題が出されるかも知れません．最初は難しいと感じると思いますが，解答，解説講義をじっくりと読み，考え方のポイントを習得していきましょう．

４．必要に応じて，数学ＩＡⅡＢも見直そう

数学Ⅲ・Ｃの問題を解くなかで，数学ＩＡⅡＢの知識を用いることがよくあります．特に，三角関数，指数・対数，数列はきちんと理解していないといけません．本書では紙面の許す範囲で補足的な説明を書き入れてありますが，上記の単元で理解が足らない部分は教科書を見直したりしておきましょう．

また，『文系の数学・重要事項完全習得編』（河合出版）は数学ＩＡⅡＢ（および，ベクトル）の基本事項を確認できる内容となっており，理系の人にもおすすめします．本書よりも少し易しめの問題で構成されていますので，数学に自信が持てない人は基礎を固める目的で利用してみてください．

大学入試では「学力」以上に「努力」が大切です．「努力」することなく「学力」は獲得できません．今，この若い時期に苦労して獲得した「学力」は皆さんの一生の財産になります．本書は皆さんの「努力」が確実に「学力」の向上につながるように問題を厳選し，解答や解説を執筆しています．あとは，本書を利用して，皆さんが最大限の「努力」をするだけなのです．

さあ，がんばろう！

著者，編集者一同

＜本書の問題に関して＞

１．一部の問題で，「マーク式」や「穴埋め形式」などの解答形式に関してのみ，原題と変更しているものがありますが，出題の主旨は一切変更していません．

２．紙面に限りがあるため，原題に書かれている

「e は自然対数の底とする」，「log は自然対数を表す」　…★

という文言を，誤解が発生しない範囲で削除しています．問題文，解答，解説講義内などで断りはありませんが，★であることを前提としていますので，ご了承ください．また，「以下の問に答えよ」といった文言も削除しています．

目 次

76 点の位置を読み取る（内分の公式の応用）

面積が1の三角形ABCと点Pに対し，$5\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つ．このとき，$\overrightarrow{AP}=\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{AC}$ と表され，三角形PABの面積は $\boxed{}$ である．（工学院大）

解答

$5\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より，

$$-5\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$
$$-9\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$$

ベクトルの引き算を使って始点をAにする．なお，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}$ である

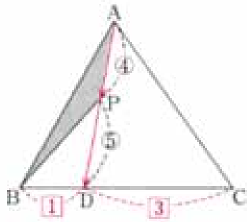
さらに，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{9}=\frac{4}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}\quad\cdots①$$

と変形できる．ここで，辺BCを1：3に内分する点をDとすると，① より，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$$

となり，AP：PD＝4：5と分かる．



したがって，

$$\triangle PAB=\frac{4}{9}\triangle ABD=\frac{4}{9}\times\left(\frac{1}{4}\triangle ABC\right)=\frac{1}{9}\triangle ABC=\frac{1}{9}$$

BD：DC＝1：3より

解説講義

前半は，“始点がP”になっている条件式を“始点がA”になるように変形するだけである．始点を変えたいときには「ベクトルの引き算」を用いればよい．引き算を使えば，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{■Q}-\overrightarrow{■P}$ という形で，始点を好きなところに変えることができる．

後半は，点Pの位置が分からなければ三角形PABの面積を考えることはできないので，前半で得られた $\overrightarrow{AP}$ の式を分析して，Pの位置を確定させることを考える．このような「点の位置をベクトルの式から確定させる」ときには，「“微調整”して，内分点を表す式を作ってみる」という方法がしばしば用いられる．$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{9}$ であるが，「分母が9でなく4であれば，内分を表す式になりそうだ」と考えて，$\dfrac{4}{9}$ で“微調整”して，解答の①を作るのである．少し難しい考え方であるが，身につけておいて損はないものである．

数学Cの必勝ポイント

ベクトルの式から点の位置を確定させたいときは，微調整して，内分点を表す式を作ってみる

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

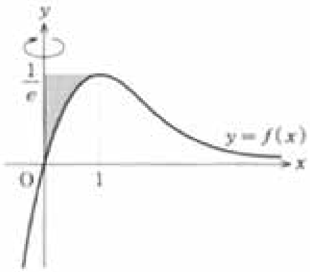
増減表より，$f(x)$ の最大値は，

$f(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ であるから，

$$f(x)\leqq\frac{1}{e}$$

が成り立つ．

(2)　(1)の増減表から，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．求める体積は，図の灰色に塗られた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積である．



$y=xe^{-x}$ より，

$$\frac{dy}{dx}=(1-x)e^{-x}$$

$$\therefore\ dy=(1-x)e^{-x}dx$$

y	$0\longrightarrow\dfrac{1}{e}$
x	$0\longrightarrow1$

求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^{\frac{1}{e}}\pi x^2dy$$

$$=\int_0^1\pi x^2(1-x)e^{-x}dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^2-x^3)e^{-x}dx\qquad\cdots①$$

ここで，部分積分を行うと，

$$\int_0^1(x^2-x^3)e^{-x}dx$$

$$=\Big[(x^2-x^3)(-e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1(2x-3x^2)(-e^{-x})dx$$

$$=0+\int_0^1(2x-3x^2)e^{-x}dx$$

$$=\Big[(2x-3x^2)(-e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1(2-6x)(-e^{-x})dx$$

$$=\Big[(3x^2-2x)e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1(2-6x)e^{-x}dx$$

$$=e^{-1}+\Big[(2-6x)(-e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1(-6)(-e^{-x})dx$$

$$=e^{-1}+\Big[(6x-2)e^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1 6e^{-x}dx$$

$$=e^{-1}+4e^{-1}-(-2)e^0-\Big[-6e^{-x}\Big]_0^1$$

$$=5e^{-1}+2+6(e^{-1}-e^0)$$

$$=\frac{11}{e}-4$$

したがって，① より，

$$V=\left(\frac{\mathbf{11}}{\boldsymbol{e}}-\mathbf{4}\right)\boldsymbol{\pi}$$

76

$0\leqq t\leqq\pi$ として，

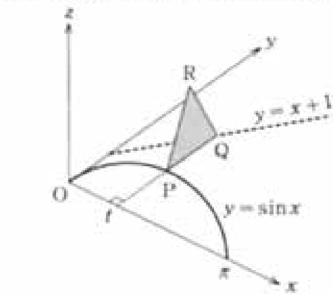
$\mathrm{P}(t,\ \sin t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t,\ t+1,\ 0)$

とする．このとき，正三角形PQRの面積を $S(t)$ とすると，$S(t)$ は，題意の立体を平面 $x=t$ で切断したときの切り口の面積である．

よって，求める体積を V とすると，V は，

$$V=\int_0^{\pi}S(t)\,dt$$

を計算すればよい．



$0\leqq t\leqq\pi$ とする．

点Pが $(t,\ \sin t,\ 0)$，点Qが $(t,\ t+1,\ 0)$ であるときの正三角形PQRの面積を $S(t)$ とする．

正三角形PQRの1辺の長さは，